

## Nusos i enllaços

Els matemàtics utilitzen mots diversos per a designar les corbes de l'espai ordinari. Quan s'interessen per corbes tancades i per aquelles propietats que es conserven per deformacions, parlen de nusos. Un nus es fabrica prenent un fil elàstic, embolicant-lo d'alguna manera sobre ell mateix i unint, finalment, els seus dos extrems. El fil pot estirar-se o deformar-se, però entendrem que tenim sempre el mateix nus mentre no tallem el fil o el tornem a enganxar.

### PIERRE DE LA HARPE

Es coneixen magnífiques representacions de nusos al llarg dels temps, per exemple a la cultura celta. Els primers treballs matemàtics sobre nusos es produeixen cap a l'any 1860 (1); trobem un interès creixent en els nusos durant els anys vint d'aquest segle (2) i s'observa una autèntica explosió de noves activitats en aquest camp a partir de 1984 (3).

Com havien fet molts d'altres abans, els matemàtics dibuixen també una gran multiplicitat de nusos. Els seus diagrames preferits són del tipus dels representats a les figures 1 i 2: són corbes tancades que es tallen elles mateixes en determinats punts, en els quals la pròpia representació ens indica quina és la part del nus que passa per dalt de l'altra. Per simplicitat, s'eliminen les cruïlles de més de dos segments i s'admet que els dos segments es creuen sempre fent un angle positiu (vegeu la figura 4). És també útil considerar diagrames que representin enllaços de diversos nusos, més o menys nuats els uns amb els altres. La figura 1 mostra dos diagrames de nusos; la figura 2 mostra un enllaç amb dues components. La figura 3 mostra una fotografia (4) de matèria cel·lular (DNA) la qual, de vegades, es presenta en la

forma d'un cordó nuat; aquest fet és conegut dels biòlegs des de principi dels anys vuitanta.

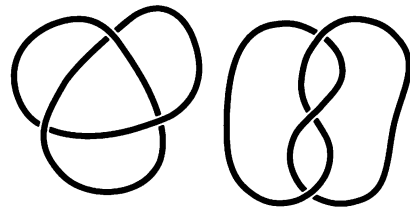


Figura 1. Dos diagrames de nusos.

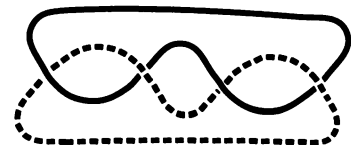


Figura 2. Un enllaç de dues components, una dibuixada amb traç continu i l'altra amb traç puntejat.

Un dels primers problemes que presenten aquests dibuixos pot formular-se de la següent manera: Quan és que dos diagrames d'aquests representen el mateix nus o enllaç? Que la pregunta no és pas trivial ens ho mostra la figura 1 (treta d'un llibre de H. Tietze (5)): A primer cop d'ull no és gens evident si els dos diagrames representen el mateix nus o no. Quin lector serà capaç de veure ràpidament que es tracta de nusos diferents?

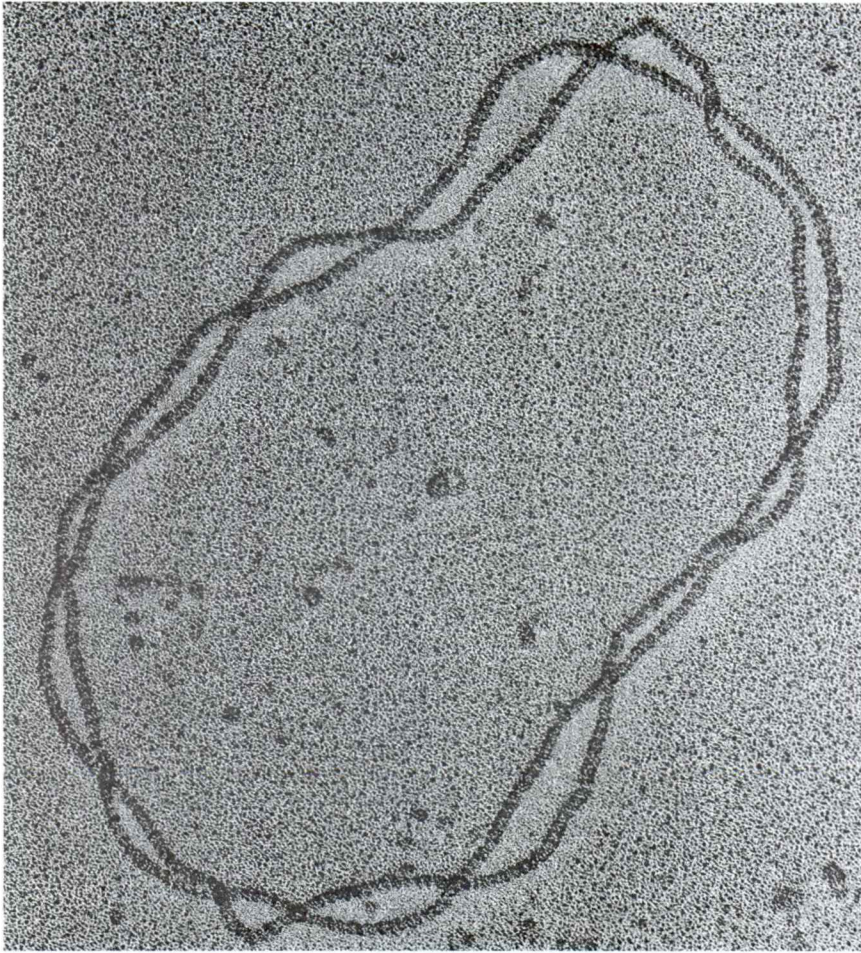


Figura 3. Una molècula de DNA nuada.

### Acoloriment de diagrames i el número de Fox d'un nus

Un dels mètodes més simples per a distingir certs tipus de nusos és l'obtingut, pels volts del 1960, per Ralph Fox, de la Universitat de Princeton (6). Certament, no ha estat fins molt recentment que les idees de Fox han trobat el seu lloc com a casos particulars d'un mètode sistemàtic (vegeu les referències (7), (8) o (9)).

Aquest mètode té a veure amb l'acoloriment. Es pren una certa quantitat senar de colors, tres en el cas més simple, i s'acolorixen, en el diagrama d'un nus o d'un enllaç, cada un dels segments continus. Es diu que aquest acoloriment compleix la regla de Fox (o que és un acoloriment de Fox) quan a cada cruïlla del diagrama coincideixen un o tres colors, però mai dos. (En el cas de 5, 7, ... colors, hi ha regles més complicades.) No és difícil de veure que quan passem d'un diagrama a un altre per mitjà d'una modificació local com les de la figura 5, és a dir, un moviment de

Reidemeister de tipus I, II o III, el nombre total d'acoloriments de Fox no canvia. Però cada deformació d'un diagrama d'un nus es pot descompondre en una successió de moviments d'aquests tipus (10), com pot veure's mitjançant una ordenació dels fils, com es fa a la figura 6. D'aquí se segueix que el número de Fox (és a dir, el nombre d'acoloriments que compleixen la regla de Fox) no depèn del diagrama considerat, sinó que només depèn del nus representat.

Així, per exemple, els dos diagrames de la figura 7 no representen pas el mateix nus: el primer nus (anomenat *nus trèvol*) admet nou acoloriments de Fox; per contra, el segon nus (anomenat *nus vuit*) n'admet només tres, cada un dels quals només utilitza un sol color. De la mateixa manera, veiem que la figura 8 representa dos enllaços diferents: mentre que el primer enllaç admet només els acoloriments amb un únic color, el segon admet un acoloriment amb tres colors.



**La teoria de nusos i el formalisme de la física estadística**

Cap a finals dels anys vuitanta els matemàtics van generalitzar aquest mètode de l'acoloriment. La idea els va arribar provinent de models de la física teòrica que, inicialment, havien servit per a l'estudi dels materials ferromagnètics com ara el ferro, el cobalt o el níquel. Aquests metalls presenten la remarcable propietat que, si s'escalfen per sobre d'una certa temperatura ben determinada, deixen de ser magnètics. La comprensió dels mecanismes microscòpics responsables d'aquest comportament és un autèntic repte per a la física.

Els primers intents de solució són els d'Ernst Ising, que va ocupar-se d'aquest problema el 1925 en la seva tesi doctoral, dirigida per Wilhelm Lenz d'Hamburg. És força curiós que l'èxit immediat d'aquesta tesi va ser força modest, fins al punt que el seu autor va haver de canviar d'activitat. Durant la guerra va sobreviure amb moltes dificultats, i va perdre tot contacte amb la recerca. Va quedar, doncs, ben sorprès quan, el 1947, després de la seva arribada als Estats Units, va trobar-se convertit en un home famós. Cal tenir present que, mentrestant, algunes de les seves idees havien estat repeses i havien conduït a desenvolupaments espectaculars dintre de la física teòrica (11).

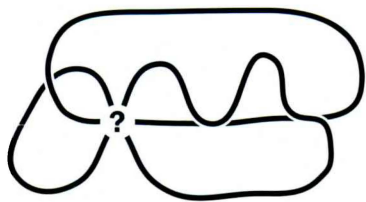
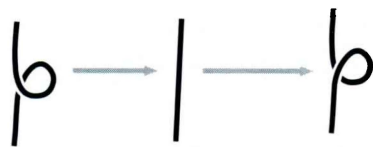


Figura 4. Un diagrama no acceptable.

Tipus I



Tipus II



Tipus III

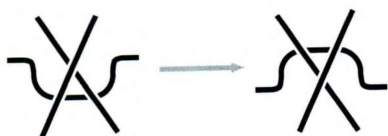


Figura 5. Els tres moviments de Reidemeister.

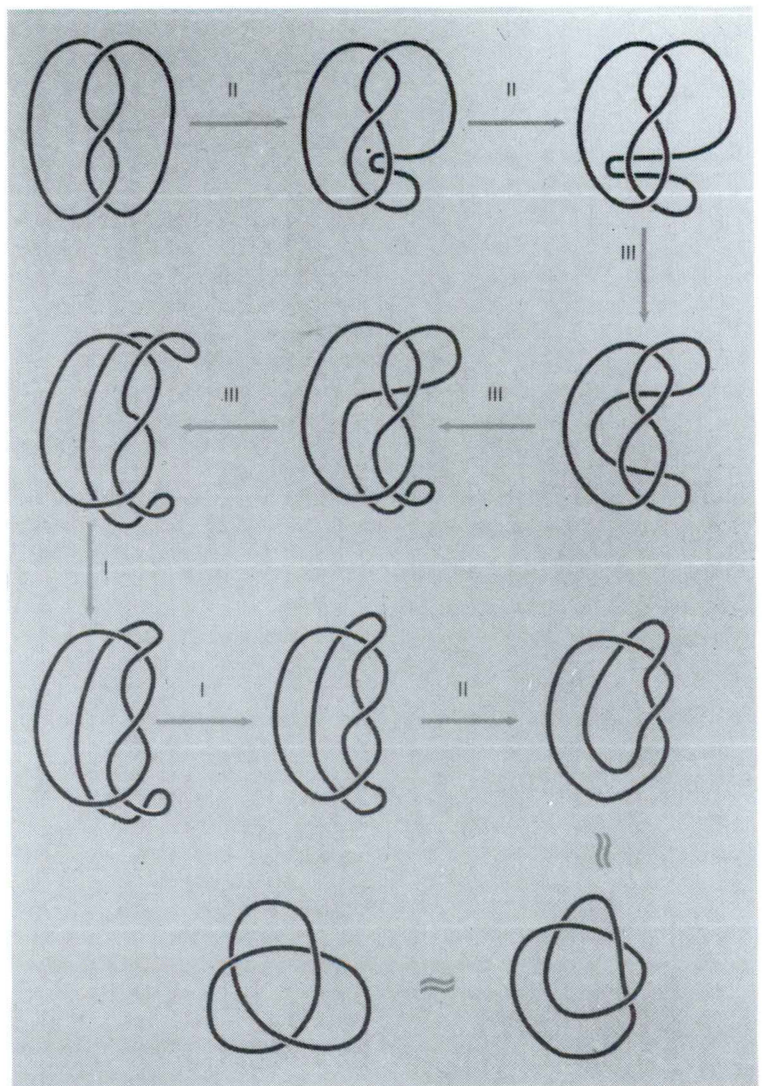


Figura 6. Seqüència de moviments de Reidemeister entre els diagrames de la figura 1.

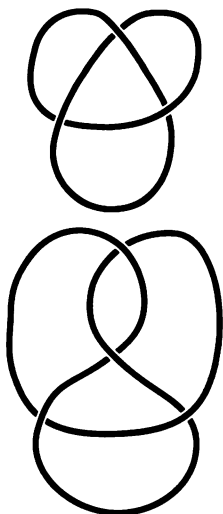


Figura 7. El nus trèvol i el nus vuit.

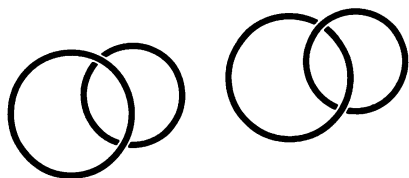


Figura 8. Dos enllaços de dues components cadascun.

En el model d'Ising es representa un cristall ferromagnètic com un reticle cúbic. Força més entenedor és estudiar el model anàleg en dues dimensions: un gran rectangle format per petits quadrats, que representa un cristall tan prim que en podem negligir el gruix. Cada aresta de la quadrícula té un àtom del cristall; en cada vèrtex es troben quatre arestes; aquest vèrtex representa la interacció dels quatre àtoms corresponents. L'estat del cristall es descriu donant un estat local (anomenat de vegades *spin* o *color*) per cada aresta-àtom. Per cada un d'aquests estats, cada vèrtex posseeix una energia local que depèn dels estats dels quatre àtoms del seu entorn; hi ha tants models d'Ising com maneres de fixar aquesta dependència. El mateix estat posseeix una energia donada per la suma (o, també, el producte) de les contribucions de cada vèrtex.

Aquesta investigació és de mena estadística i considera valors mitjans de tots els estats possibles. En els casos favorables i per a cristalls rectangulars prou grans, el resultat dels càlculs depèn, de manera notable, de la temperatura. Aquests càlculs fan més entenedor el fascinant comportament dels metalls ferromagnètics.

La regularitat d'un reticle és el que fa possible de dur els càlculs fins al final. De tota manera, si relaxem l'exigència sobre el resultat final, el formalisme del model d'Ising es pot aplicar fàcilment a situacions més generals: Per exemple, podem aplicar aquest formalisme a qualsevol diagrama format de punts, que anomenarem *vèrtex*, i els quals s'uneixen per segments de corbes, anomenats *arestes*, de manera que en cada vèrtex coincideixin exactament quatre arestes. És a dir, podem aplicar-ho als diagrames dels enllaços (a les cruïlles, comptem el segment del damunt com a dues arestes, encara que sigui un traç continu).

En el cas concret dels models de Fox de tres colors, un estat del diagrama ve especificat per l'acoloriment de les seves arestes. A cada vèrtex, se li atorga un coeficient d'energia que té el valor 1 si es compleix la regla de Fox (com a l'exemple de la figura 9), i té el valor 0 en cas contrari (figura 10). Els casos en què el coeficient d'un vèrtex és 0 són: 1) el segment del damunt té colors diferents a cada costat de la cruïlla; 2) el segment del damunt té un únic color, però el de sota té aquest mateix color en un costat i un de diferent en l'altre; 3) el segment del damunt té un únic color i el de sota en té un de diferent als dos costats de la cruïlla. L'energia total de l'estat és el producte dels coeficients: 1 si es compleix la regla de Fox arreu i 0 en cas contrari. La suma de les energies de tots els estats és exactament el número de Fox que hem definit abans.

Estrictament parlant, d'això que hem dit no es dedueix pas cap aplicació dels resultats de la física teòrica a la teoria de nusos, però sí que tenim una mostra d'un formalisme fructífer, d'un exemple típic de treball interdisciplinari.

### Desenvolupaments actuals

Els físics teòrics que estudien els cristalls, especialment els cristalls ferromagnètics, són, sovint, els mateixos que s'interessen per la teoria quàntica de camps, és a dir, la interacció de camps electromagnètics i nuclears i, també, camps gravitatoris. El motiu d'això és el següent: aquestes interaccions s'estenen per l'espai, que nosaltres considerem com un continu. Aquest aspecte continu de l'espai, però, fa que els càlculs siguin, en l'estat actual de les matemàtiques, inassolibles. Això ens duu a considerar el cas en què l'espai estigués format pels vèrtexs d'un reticle, imaginant

que la distància entre vèrtexs contigus tendeix a zero. És a dir, imaginem l'espai com el límit d'una mena de reticle cristal·lí. Aquest punt de vista ha demostrat ser força útil en la teoria de camps. A partir d'aquí, en aquests darrers anys s'ha produït un múltiple intercanvi d'idees entre la teoria de camps, la física de les substàncies ferromagnètiques i la teoria de nusos, per citar només aquests tres camps de la ciència.

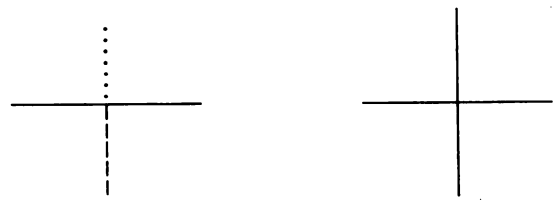


Figura 9. Coloracions a l'entorn d'un vèrtex que compleixen la regla de Fox.

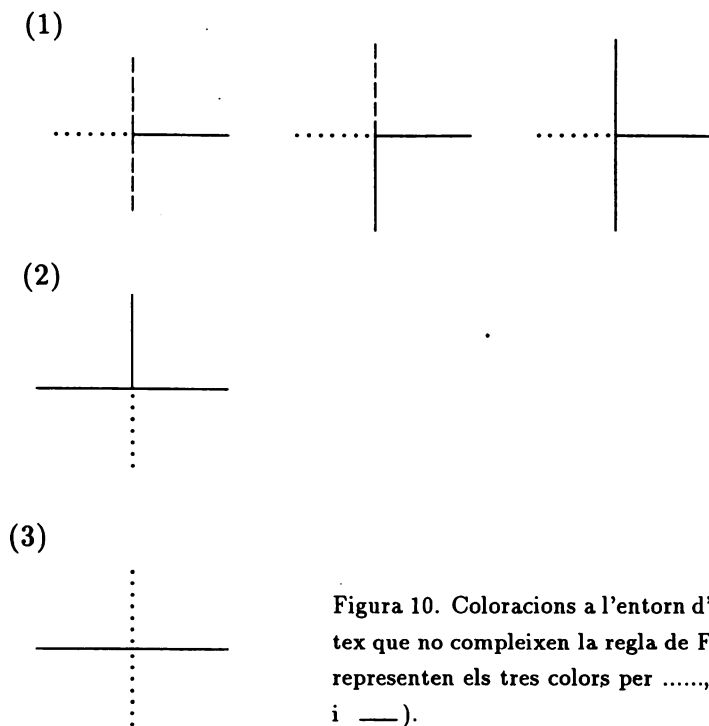


Figura 10. Coloracions a l'entorn d'un vèrtex que no compleixen la regla de Fox. (Es representen els tres colors per ....., - - - i —).

Referències

1. P.G. Tait, *On Knots*, Trans. Roy. Soc. Edinburgh (1867).
2. J.W. Alexander, *Some Problems in Topology*, Verhandl. Internat. Mathematiker-Kongress Zürich 1 (1932), 249-257.
3. V.F.R. Jones, *A Polynomial Invariant for Knots via von Neumann Algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 103-111.
4. A. Stasiak, *Photographie d'une molécule d'ADN nouée*, Laboratoire d'Analyse Ultrastructurale, Université de Lausanne.
5. H. Tietze, *Ein Kapitel Topologie*, Zur Einführung in die Lehre von den verknoteten Linien. Teubner, 1942.
6. R.H. Crowell und R.H. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Ginn and Co., 1963.
7. L. Kauffmann, *State Models and the Jones Polynomial*, Topology 26 (1987), 395-407.
8. V.F.R. Jones, *On Knot Invariants Related to some Statistical Mechanical Models*, Pacific Journal Math. 137 (1989), 311-334.
9. P. de la Harpe und V.F.R. Jones, *Graph Invariants Related to Statistical Mechanical Models: Examples and Problems*, J. Comb. theory Ser. B 57 (1993), 207-217.
10. K. Reidemeister, *Elementare Begründung der Knotentheorie*, Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1926), 24-32.
11. S.G. Brush, *History of the Lenz-Ising Model*, Reviews of Modern Physics 39-4 (1967), 883-893.

Pierre de la Harpe és professor a la secció de matemàtiques de la Universitat de Ginebra.